Contrastes Epistemológicos del Binomio de Newton y la Serie de Taylor en Dos Variables en los Fenómenos Físicos

Hipólito Hernández
CIMATE - Universidad Autónoma de Chiapas
México
polito_hernandez@hotmail.com
Epistemología – Nivel Superior

Resumen

En esta investigación presentamos elementos de análisis a través de los contrastes epistemológicos desde diferentes planos, para lo cual revisamos textos vigentes de álgebra, cálculo, física, textos de difusión de antaño, revisión del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor. En estos contrastes observamos que los contenidos y los fenómenos físicos están descontextualizados de las prácticas sociales. También, permite ver que la noción de variación y de predicción, en tanto a práctica social, actúa como eje central en la reconstrucción del cálculo y física escolar.

Introducción

En este trabajo se revisaron textos de álgebra, cálculo, métodos numéricos y textos de física, con la finalidad de ver cómo están estructurados en cuanto al binomio de Newton, la serie de Taylor, las diferencias finitas y los fenómenos físicos. También se revisaron textos de antaño de difusión del cálculo, por ejemplo el de Lacroix (1797) y Díaz Covarrubias, (citado en Camacho, 2002), así como el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor desde un punto de vista de las prácticas sociales que emergen de estos saberes matemáticos. Partimos de estas revisiones para hacer contrastes epistemológicos en los diferentes planos: epistemología del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor contra la epistemología de Cauchy, textos de difusión de antaño contra los textos vigentes, textos vigentes contra el origen del binomio de Newton y la serie de Taylor, textos de difusión de antaño contra el origen del binomio y la serie de Taylor, todo lo anterior, es con el objetivo de relacionar el conocimiento matemático y la práctica social en tanto unidad de análisis. Estos resultados nos arrojan elementos de análisis para hacer una reconstrucción del cálculo y física escolar.

Problemática

En el discurso matemático actual en la enseñanza de la matemática, física y ciencias de la ingeniería que forman parte del plan de estudios de la carrera de ingeniería civil, los contenidos matemáticos en estas disciplina son abordados con métodos analíticos del cálculo de una o de dos variables a través del concepto de límite, es decir con un acercamiento de Cauchy. En los cursos, y textos de álgebra o cálculo, el binomio de Newton es expresado de la forma $(a+b)^n$ y utilizado sólo en un ambiente algorítmico sin considerar su origen y su contexto social. En el discurso de física, el binomio de Newton es sólo utilizado como una herramienta de aproximación, cuando es desarrollado como una serie de potencias fraccionarias o negativas de algún fenómeno físico, por ejemplo: $(1+z)^n \approx 1+nz$, así mismo la serie de Taylor y las diferencias finitas (Zill, 1993; Aleksandrov y Kolmogorov, 1976) son transposiciones de dos saberes matemáticos (Chevallard, 1997) que están desvinculados entre uno y otro, así como del contexto físico, es decir, no existe una integración de estos contenidos matemáticos en los planes de estudios vigentes y en los textos actuales que a la vez son recomendados en la matemática escolar vigente. En los textos escolares de física e ingeniería (Benson, 1999) consultadas en nuestro medio, eventualmente aparecen en forma implícita ideas estrechamente vinculadas a las nociones de la serie de Taylor, por ejemplo: $f(x+\Delta x)$ para funciones de una variable independiente, o bien $f(x+\Delta x, t+\Delta t)$ para funciones de dos variables independientes, aunque no aparece en forma explícita la noción de variación y de predicción en los fenómenos físicos. En el contexto anterior hemos abordado la pregunta de investigación siguiente ¿Qué prácticas sociales emergen en la transición del binomio de Newton y la serie de Taylor? tanto de una variable como de dos variables. El discurso de la matemática escolar vigente en las disciplinas mencionadas parece inhibir las ideas de variación y predicción de los estudiantes, puesto que el cálculo escolar es visto como una estructura formal que antecede al análisis (Cantoral, 2001).

Marco teórico

En la figura 1, se muestra en forma esquemática como visualizar las relaciones de las dimensiones que conforman una aproximación socioepistemológica a la matemática educativa: la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva, la dimensión didáctica y la dimensión social, cada dimensión tiene su propia teoría en cuanto a su marco teórico, pero tienen características comunes entre ellos al interactuar en los procesos didácticos a partir de la actividad humana (prácticas sociales) que realizan conjuntamente profesor - alumno en el aula y fuera de ella. En la investigación de Buendía y Cordero (2002) hacen énfasis que no sólo los aspectos cognitivos están en juego en la construcción de objeto matemático sino en la práctica social que conduce a la adquisición del conocimiento, donde el propósito de la matemática educativa es la de esclarecer y evidenciar la existencia de relaciones entre el conocimiento y prácticas sociales, es decir, enfatizar la componente social sistemáticamente con otras dimensiones: epistemológica, cognitiva, didáctica del conocimiento matemático. La aproximación socioepistemológica, es el resultado de la conjunción de estas dimensiones, como marco teórico, en particular en este trabajo, se busca los contrastes epistemológicos del binomio de Newton y la serie de Taylor con la finalidad de relacionar el conocimiento matemático y las prácticas sociales en tanto unidad de análisis.

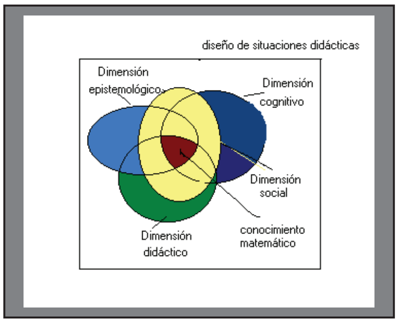


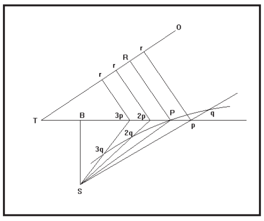
Figura 1. Relación entre las componentes de la aproximación socioepistemológica

Epistemología del origen del binomio de Newton y la serie de Taylor

En el estudio de Hernández (2003) del movimiento bajo la óptica de los marcos epistémicos de Aristóteles, Galileo y Newton, se observa que: en el marco epistémico de Aristóteles deja entre ver que está inmersa la noción de variación, en las descripciones cualitativas que en esa época se cuestionaban en las causas reales del movimiento. En el marco epistémico de Galileo establece su primera relación funcional en la cual aparece la noción de variación, predicción y cuantificación, puesto que al pasar de un estado de movimiento a otro, existe una variación de la variable independiente y de la variable dependiente (tanto discretas como continuas), de la misma manera al establecer una relación de distancia-tiempo, en esta transición entre la variable independiente y dependiente emerge la noción de variación cuando el movimiento es con velocidad constante, pero también proporciona la base de la noción de *variación de la variación* al pasar de un estado de movimiento a otro con velocidad variable, en esta parte aparece el germen de la serie de Taylor pero no de forma muy clara, posteriormente con el marco epistémico de Newton se vislumbra mucho más las nociones de: variación, predicción, cuantificación del movimiento, puesto que se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidas las condiciones iniciales (Muñoz, 2000; Piaget y García, 1994). En la investigación de Cantoral, (2001) dice que el proceso de cambio en la naturaleza se registra en la variación de las variables, precisa el reconocimiento del praediciere en los procesos de predicción de corto y largo alcance, se sustenta en otro mecanismo de funcionamiento en la construcción de conocimiento: el movimiento general y los fenómenos de flujo en particular poseen herencia, con esto queremos decir que el estado ulterior $P+PQ$ del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto *P*, la evolución de un sistema está completamente determinado por sus variaciones primeras. Esta conexión entre estados precisa como sustento primario el reconocimiento de "el praediciere" asociada con la variación y cambio en la naturaleza. En el caso del movimiento de un fluido, P es el estado inicial del fluente continuo, en la cual queremos predecir el estado $P+PQ$ del fenómeno, entonces: $P \to P+PQ$, donde PQ es la variación de la variable independiente, con esta idea y en la necesidad social de predecir, conocer, adelantar, Newton descubrió el binomio que hoy en día lleva su nombre y fue dado como: $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc$ (1)

Según Edward (1937), Taylor publica su serie, basado en el *argumento de interpolación* de Gregory–Taylor y usando las diferencias finitas se llego a; $y = y_0 + n\Delta y_0 + n(n-1)/2\Delta^2 y_0 + n(n-1)(n-2)/6\Delta^3 y_0 + \ldots + n\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0$. En esencia, Taylor quiso tomar el límite como $\Delta x \to 0, cuando, n \to \infty$ y x es fija, para construir $y = y_0 + (x-x_0)\dot{y}_0/\dot{x}_0 + (x-x_0)^2 \ddot{y}_0/2(\dot{x})^2 + (x-x_0)^3 \ddot{y}_0/6(\dot{x})^2 + \ldots$.Esta fórmula es la serie de Taylor original e interpreta la razón de fluctuación como derivada. En síntesis el binomio de Newton y la serie de Taylor son vistas como instrumento de predicción en un contexto de variación.

En seguida presentamos un ejemplo, que consiste en la determinación de las trayectorias de los cometas, Newton (1728) dice que una vez resuelto este problema tendrá por fin, un método para determinar exactamente las trayectorias de los cometas. Mediante la regla de la falsa posición puede saberse por fin, si los cometas completan la órbita en tiempos dados y en qué períodos de tiempo se completan las revoluciones de cada uno. Para aplicar el método se antepone el lema:



Dadas en posición, dos rectas OR, TP, cortarlas con una tercera RP formando el ángulo recto TRP, de tal modo que si la recta SP se traza hasta un punto dado S, venga dado el sólido contenido por dicha recta SP y el cuadrado de la recta OR terminada en un punto dado O.
La elección de la suma o la resta se discierne de la observación del esquema. Si por casualidad fuese necesaria una ulterior corrección, repítase la operación. Aritméticamente así: Supongamos el esquema hecho, y sea la línea *TP* hallada gráficamente de la longitud correcta de las *OR*, *BP* y *SP* serán:

$\sqrt{SP + 2BPe + ee} = SP + \dfrac{BP}{SP}e + \dfrac{SB^2}{2SP^2}ee,...., etc$. En este método está presente la noción de predicción y variación, además se observa que están implícitos los términos del binomio y la serie infinita de Taylor en el desarrollo de la raíz cuadrada.

Epistemología de Cauchy

En la enseñanza del cálculo escolar vigente subyace una epistemología de Cauchy, fundamentado en las definiciones de función, de continuidad, de límite, así como el estudio de las series infinitas donde fija claramente la convergencia, es decir, anclado en su teoría de las funciones analíticas que dieron pie al análisis matemático. En particular la integral de Cauchy (Cordero,1994) dice que bajo la concepción de las funciones y continuidad las cuales determinan el contexto de la integral, y la estrategia, que relaciona la definición de la integral con la concepción primitiva, consistió en mirar el dominio de la función, específicamente las cantidades variables, de las cuales establece una correspondencia entre ellas. En esta epistemología Muñoz (2003) comenta que el concepto de integral se reduce a la definición de integral de Cauchy en tanto objeto de enseñanza y al estudiante se asocia como sujeto cognoscente se le obliga a interactuar con la definición en tanto objeto de conocimiento. Lo cual muestra que ésta epistemología no esta centrada en la predicción.

Epistemología de los textos de difusión del cálculo de antaño

En la obra de difusión de Lacroix, (1797) aparece la serie de Taylor para funciones de una variable y la serie con y fija, $f(x+h, y) = f(x, y) + \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}h + \dfrac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\dfrac{h^2}{2!} + etc.$ análogamente para x fija se tiene otra serie. Por lo tanto, la serie de Taylor para dos variables queda como: $f(x+h, y) = \sum_{k=0}^{n}\left[h\dfrac{\partial}{\partial x} + k\dfrac{\partial}{\partial x}\right]^k f(x, y) + etc.$

Estas ecuaciones están anclados a una epistemología parecida a la Lagrangiana, que consiste en la noción de variación y la creencia de que toda función se puede expresar como una serie de potencia.

En la obra de difusión de Díaz Covarrubías (citado en Camacho, 2002) en la enseñanza del cálculo se centró en los fenómenos físicos y en la definición de variables en donde la noción de cantidad adquiere toda su esencia, consideró como cantidades susceptibles de adquirir diversos valores. Con esta definición inició la construcción del cálculo infinitesimal en México. En la práctica, la validez del programa de Díaz Covarrubias, solo es posible si se analizan separadamente cada uno de los términos que integran la serie: $f(x+h) = f(x) + \frac{dy}{dx}h + Bh^2 + Ch^3 + ...etc.$ donde prescinde, en caso necesario de las potencias mayores de uno de los valores de h, no para evanecerles o aplicarles un límite, sino por su inutilidad práctica dentro del problema real o físico. En el análisis que hace del concepto de límite se reafirma su resistencia al mismo.

Epistemología de los textos vigente: álgebra, cálculo, física e ingeniería

En los textos escolares actuales de álgebra elemental, Baldor (1988), Klinger (1978) tratan al binomio desde potencia 2 hasta de *n* potencia entero positivo y es dado como: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ...b^n$ (2)

Debe notarse que el desarrollo de un binomio con potencia negativo o fraccionario no tiene último término, puesto que el coeficiente nunca es igual a cero. "El desarrollo del binomio de (*a* + *b*) para exponentes fraccionarios o negativos, es válido únicamente si el valor de *b* está entre el de *a* y el de *–a*", esto es, $b < |a|$. En los textos de cálculo con un enfoque más al análisis matemático como Kuratowski (1985), el binomio de Newton es expresado a través de la misma ecuación (2). Tanto en los textos de álgebra elemental, superior y los de cálculo no aparece la noción variación y de predicción.

Por otra parte en el texto de física universitaria Benson (1999), las dos caras de la placa de aire, que originalmente estaban en presiones *x* y *x* + *dx*, se desplazan a *x* + *s(x,t)* y (*x* + *dx)* + *s(x* + *dx, t)*. En este problema está presente implícitamente la noción de variación y la predicción asociada al uso de una serie infinita.

Contrastes epistemológicos

1. En el contraste de la Epistemología de Newton y la epistemología de Cauchy, podemos decir, que la epistemología de Newton se basa en las prácticas sociales de ese momento, en este caso: predecir, adelantar y modelar, un fenómeno natural, en la metáfora del flujo de agua, mientras que la epistemología de Cauchy se basa en el análisis del límite, continuidad y convergencia de funciones y centrado en el dominio de la función en la cual es inherente la fundamentación del cálculo (Análisis Matemático).
2. Epistemología de textos de difusión de antaño contra la epistemología de los originales de Newton y la serie de Taylor. En algunas obras de matemáticas (texto de cálculo) como por ejemplo: La obra de Lacroix, la obra de Díaz Covarrubias continuaron durante algunos años con el acercamiento de Lagrange en donde que toda función era posible desarrollarse en serie de potencias, en donde muestra la construcción de la serie de Taylor en una y en dos variables anclado a la noción de variación pero difiere en la centración de la noción de predicción. Es por esto, que debemos de explorar la epistemología del acercamiento Lagrangiano, puesto que

se localiza un robusto cuerpo conceptual que podría dar pie a nuevos acercamientos didácticos y que pueden estar inmersos en los estudiantes en una situación escolar.
3. Epistemología de textos de difusión de antaños contra la epistemología de textos vigentes. Del apartado anterior observamos que el discurso escolar de los textos de difusión de antaños es en base al acercamiento Lagrangiano, centrado en los fenómenos físicos, esta epistemología es diferente con los textos vigentes de cálculo en la cual esta basado con un acercamiento de Cauchy, en donde privilegian el análisis con una mirada en el dominio de las funciones, y el estudio de las series infinitas centradas en la convergencia.
4. Epistemología de los textos vigentes de matemáticas contra la epistemología de los originales. El binomio escrito por primera vez en Newton como en la ecuación (1) y el binomio que aparece en los textos dado como en la ecuación (2) son equivalentes pero conceptualmente distintos, puesto que la epistemología que Newton usó es diferente a la que hoy enseñamos, en esa época obedeció a un programa emergente, como alternativo al campo de la ciencia, en ello buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con la matematización con base en la metáfora del flujo del agua. En los textos actuales de álgebra elemental y superior así como de cálculo el binomio de Newton está expresado como la ecuación (2) en donde la discusión gira en torno a los coeficientes binomiales, es decir, no aparece ni implícitamente la noción de predicción, ni de variación. En los textos actuales de cálculo, la serie de Taylor está basada en un discurso escolar apoyado en una epistemología de Cauchy, es decir, el Cálculo a través del concepto de límite donde el eje de la discusión es la convergencia de la serie. En los textos de física y de ingeniería aparecen eventualmente ideas vinculadas a las nociones de predicción y de variación de una forma implícita. Sin embargo hemos puesto en evidencia que la serie de Taylor funciona como un instrumento de predicción y no como un objeto de convergencia.
El análisis anterior nos está proporcionando referentes importantes, centrados en la noción de predicción en tanto a practica social, con el fin de rediseñar el cálculo en las instituciones escolares, el cual es el objetivo fundamental de la socioepistemología.

Referencias Bibliográficas

Alksandrov A., Kolmogorov A. y Laurentiev M. (1976). La matemática: su contenido, método y significado. México: Alianza Editorial.

Baldor, A. (1988). *Álgebra*. México: Publicaciones Culturales.

Benson, H. (1999). *Física Universitaria*. Vol. 1. México: CECSA

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. España: Alianza Editorial.

Bronshtein, I. y Semendiaev, K. (1977). *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. Moscú: Mir.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. (2002). Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del sigloXIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 5(1), 5-26.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados (un estudio del discurso matemático escolar)*. Tesis de Doctorado en matemática educativa. Cinvestav, México, D.F.

Edward, C.H. (1979). *The historical development of the calculus*. USA: Spriger-Verlag.

Hernández, H. (2002). Una epistemología de la matemátización del movimiento: caso de predicción y variación con las diferencias finitas y la serie de Taylor. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 17(2), 594-600. Cuba.

Klinger, F. (1979). *¿El álgebra? ¡Pero si es bien fácil!* México: Marcombo.

Kuratowski, K (1975). *Introducción al cálculo*. México: Limusa.

Lacoix, S.F. (1797). *Tratés Du Calcul Différentiel Du Calul Intégral*. Francia.

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 3(2), 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del cálculo integral: el caso de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(2), 415-421. Cuba.

Newton, I. (1728). *Sistema del Mundo*. México: Ediciones Sarpe, colección los grandes pensadores.

Piaget, J. & García, R. (1996). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. México: Siglo XXI.

Zill, D. (1993). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. México: Iberoamérica.